Liviu Vlaicu

505 PROBLEME REZOLVATE

DIN TESTELE-GRILĂ DE MATEMATICĂ PENTRU ADMITEREA LA UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Editura Paralela 45

CUPRINS

Cuvânt-înainte

Examenul de tip grilă, tot mai des folosit în ultimii ani pentru selecţia dintr-un mare număr de candidaţi la admiterea în universităţi, s-a perfecţionat an de an, ajungând un mod foarte eficient şi obiectiv de ierarhizare după nivelul cunoştinţelor şi capacitatea de a le folosi în probleme mai dificile.

Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca este printre primele universităţi din ţară care au adoptat acest mod de selecţie a candidaţilor la admitere, având o tradiţie de peste 20 de ani. În fiecare an au apărut culegeri cu enunţurile subiectelor propuse, în număr de peste 1000, cu foarte puţine indicaţii de rezolvare.

Cartea de faţă, elaborată de domnul profesor Liviu Vlaicu, profesor cu o îndelungată activitate de pregătire a elevilor pentru concursurile de orice nivel, va fi extrem de utilă candidaţilor, care vor găsi soluţiile la numeroase probleme propuse de noi (Departamentul de Matematică al UTCN) în ultimii 20 de ani, dintre care multe au un grad ridicat de dificultate.

Problemele sunt gradate pe ani de studii, astfel că ele pot fi urmărite de elevii interesaţi încă din clasa a IX-a.

În ultimii 10 ani, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca a avut parteneriate cu peste 30 de licee de elită, la care s-a experimentat în fiecare an o simulare a examenului de admitere cu probleme pe trei niveluri: clasele IX – X, XI şi XII, o parte dintre ele fiind de asemenea rezolvate în această carte.

Considerăm culegerea foarte utilă pentru pregătirea examenului de admitere.

Vă urăm succes!

Conf. univ. dr. Vasile Pop

Algebră
Clasa a IX-a

1. Se consideră mulţimea tripletelor de numere reale (a, b, c) care verifică relaţia $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Atunci $\min(ab + bc + ca)$ pentru această mulţime este ...

(*T.G.* 2006, ex. 46, p. 8)

2. Fie m, n, p numere naturale nenule, $m \neq n$. Dacă într-o progresie aritmetică avem $a_n = m$ şi $a_m = n$, atunci a_p este egal cu ...

(*T.G.* 2018, ex. 222, p. 21)

3. O progresie aritmetică crescătoare $(a_n)_{n\geq 1}$ verifică relaţiile $a_9 + a_{10} + a_{11} = 15$ şi $a_9 \cdot a_{10} \cdot a_{11} = 120$. Suma primilor 20 de termeni din progresie este ...

(*T.G.* 2018, ex. 134, p. 13)

4. Mulţimea soluţiilor reale ale inecuaţiei $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3} < \sqrt{2} - \sqrt{3}$ este ...

(*T.G.* 2018, ex. 90, p. 10)

5. Suma $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + ... + \frac{n}{(n+1)!}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este egală cu ...

(*T.G.* 2018, ex. 128, p. 13)

6. Pentru ce valori ale parametrului real b ecuaţia:

$$x^3 + a(a+1)x^2 + ax - a(a+b) - 1 = 0$$

admite o rădăcină independentă de a?

(*T.G.* 2018, ex. 136, p. 14)

7. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 1$ este ...

(*T.G.* 2018, ex. 89, p. 10)

8. Pentru ca funcţia $f : \mathbb{R} \to B$, $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1}$ să fie surjectivă, trebuie ca B să fie egal cu ...

(*T.G.* 2018, ex. 101, p. 11)

9. Mulţimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $x^4 + 4x^3 + ax^2 + 4x + 1 = 0$ are toate rădăcinile reale este ...

(*T.G.* 2018, ex. 217, p. 21)

10. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = \frac{[x]}{1+\{x\}}$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x, iar $\{x\}$ este partea fracţionară a numărului real x. $f(\mathbb{R})$ este ...

(Admitere *U.T.C.N.* iulie 2014)

11. Mulţimea valorilor parametrului real m, pentru care ecuaţia:
$$x(x-1)(x-2)(x-3)=m$$
are toate rădăcinile reale, este ...

(*T.G.* 2018, ex. 155, p. 15)

12. Ecuaţia $x^4+(2m-1)x^2+2m+2=0$, cu necunoscuta x şi parametrul real m, are toate rădăcinile reale dacă m este egal cu ...

(*T.G.* 2018, ex. 155, p. 15)

13. Sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x+2y+mxy=5 \\ (m-1)(x+y)+xy=1 \\ 3x+3y-xy=m+1 \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$ este compatibil pentru m aparţinând mulţimii ...

(*T.G.* 2018, ex. 56, p. 6)

14. Se consideră ecuaţia $2x^2-2mx+m^2-2m=0$, unde $m\in\mathbb{R}$, iar x_1 şi x_2 sunt rădăcinile reale ale ecuaţiei.

a) Suma rădăcinilor, x_1+x_2, aparţine intervalului ...

b) Suma pătratelor rădăcinilor, $x_1^2+x_2^2$, aparţine intervalului ...

c) Produsul rădăcinilor, x_1x_2, aparţine intervalului ...

15. Fie funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $g(x)=\begin{cases} x+2, & \text{dacă } x\le 0 \\ 3x+2, & \text{dacă } x>0 \end{cases}$.

a) Funcţia $g^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este dată de ...

(*T.G.* 2013, ex. 24, p. 4)

b) Soluţia inecuaţiei $g(x)+g^{-1}(x)<0$ este ...

(*T.G.* 2013, ex. 25, p. 4)

16. Se dau funcţiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definite prin:
$$f(x)=\begin{cases} 5x+1, & x<0 \\ 1-x^2, & x\ge 0 \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} x^2, & x\le -2 \\ 2x-1, & x>-2 \end{cases}.$$
Funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h=f\circ g$ este definită prin ...

(*T.G.* 2013, ex. 26, p. 5)

17. Fie două progresii, una aritmetică şi una geometrică, fiecare cu câte 4 termeni astfel încât adunând fiecare termen de acelaşi rang din cele două progresii să se obţină ca sumă 18, 18, 26, respectiv 58. Raţia progresiei geometrice este ...

(*T.G.* 2010, ex. 367, p. 51)

18. Mulţimea soluţiilor reale ale inecuaţiei $\dfrac{2\sqrt{x+1}}{1-2\sqrt{3-x}}<1$ este ...

(*T.G.* 2008, ex. 167, p. 26)

19. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - (m-1)x + 3m - 4, m \in \mathbb{R}$.

a) Mulţimea valorilor lui m pentru care f se anulează în $(0, 1)$ şi $f(x) \geq 0, \forall x \in (0, 1)$ este ...

(*T.G.* 2006, ex. 123, p. 21)

b) Mulţimea valorilor lui m pentru care $f(x) < 0, \forall x \in (0, 1)$ este ...

(*T.G.* 2006, ex. 124, p. 21)

20. Se dă fracţia $F(x, m) = \dfrac{(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + m - 2}{x^2 + 2x + m}$. Valorile reale ale parametrului m, pentru care fracţia F verifică inegalitatea $F > 0$, pentru orice $x > 0$, sunt ...

(*T.G.* 2006, ex. 68, p. 11)

21. Se consideră ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$, unde a, b, c sunt numere întregi impare. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?

A. Ecuaţia are o rădăcină pară. B. Ecuaţia are o rădăcină impară.
C. Ecuaţia are două rădăcini pare. D. Ecuaţia nu are rădăcini întregi.
E. Ecuaţia are două rădăcini impare.

(*T.G.* 2018, ex. 215, p. 21)

22. Sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = a \end{cases}$ are o singură soluţie $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dacă a este egal cu ...

(*T.G.* 2018, ex. 99, p. 11)

23. Câte soluţii are ecuaţia $x^2 = 3y^2 + 1$ în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

(*T.G.* 2005, ex. 334, p. 70)

Geometrie analitică

395. Fie punctele $A(1, 1)$, $B(2, -3)$, $C(6, 0)$. Coordonatele punctului D, pentru care $ABCD$ este paralelogram, sunt ...

(*T.G.* 2018, ex. 527, p. 48)

396. Fie triunghiul ABC, unde $B(-4, -5)$. Ecuaţia înălţimii duse din A este

$$5x + 3y - 4 = 0.$$

Ecuaţia dreptei BC este ...

(*T.G.* 2010, ex. 735, p. 102)

397. Triunghiul ABC are latura $[AB]$ pe dreapta $4x + y - 8 = 0$, latura $[AC]$ pe dreapta $4x + 5y - 24 = 0$, iar vârfurile B şi C pe axa Ox. Ecuaţia medianei corespunzătoare vârfului A este ...

(*T.G.* 2010, ex. 733, p. 102)

398. Dreapta care trece prin $C(1, 2)$, neparalelă cu AB şi faţă de care punctele $A(-1, 1)$ şi $B(5, -3)$ sunt egal depărtate, are ecuaţia ...

(*T.G.* 2018, ex. 526, p. 48)

399. Fie $A(0, -1)$, d_1: $x - y + 1 = 0$ şi d_2: $2x - y = 0$. Coordonatele punctelor $B \in d_1$ şi $C \in d_2$, pentru care dreptele d_1 şi d_2 sunt mediane în triunghiul ABC, sunt ...

(*T.G.* 2010, ex. 739, p. 103)

400. În planul xOy se consideră punctele $S(0, 12)$ şi $T(16, 0)$, iar $Q(x, y)$ un punct variabil situat pe segmentul $[ST]$. Punctele P şi R aparţin axelor de coordonate astfel încât patrulaterul $OPQR$ să fie dreptunghi.

a) Ecuaţia dreptei ST este ...

b) Aria dreptunghiului $OPQR$ este ...

c) Valoarea maximă a ariei dreptunghiului $OPQR$ este ...

(*T.G.* 2018, ex. 534, 535, 536, p. 49)

401. În sistemul cartezian de coordonate xOy, o dreaptă variabilă d care conţine punctul $A(0, 5)$ intersectează dreptele $x - 2 = 0$ şi $x - 3 = 0$ în punctele B, respectiv C.

a) Determinaţi panta dreptei d astfel încât BC să aibă lungime maximă.

(*T.G.* 2008, ex. 826, p. 116)

b) Determinaţi panta dreptei d astfel încât triunghiul OBC să fie isoscel.

(*T.G.* 2008, ex. 827, p. 116)

402. Se consideră expresia $E(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 10y$.

a) Distanţa de la punctul (x, y) la punctul $(3, 5)$ este ...

b) Valoarea minimă a lui $E(x, y)$ pentru $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ este ...

c) Se consideră mulţimea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$. Valoarea minimă a lui $E(x, y)$ pentru $(x, y) \in D$ este ...

(*T.G.* 2018, ex. 544, 545, 546, p. 50)

403. Raza cercului care trece prin punctele $A(-4, 0)$, $B(4, 4)$, $O(0, 0)$ este ...
(*T.G.* 2018, ex. 528, p. 48)

404. Ecuaţiile dreptelor care trec prin punctul de intersecţie a dreptelor de ecuaţii $11x + 3y - 7 = 0$ şi $12x + y - 19 = 0$ şi care se află la egală distanţă de punctele $A(3, -2)$ şi $B(-1, 6)$ sunt ...
(*T.G.* 2018, ex. 530, p. 48)

405. Fie dreapta D: $x + y = 0$ şi punctele $A(4, 0)$, $B(0, 3)$. Valoarea minimă a sumei $MA^2 + MB^2$ pentru $M \in D$ este ...
(*T.G.* 2018, ex. 543, p. 49)

406. Se consideră în plan punctele $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ şi dreapta de ecuaţie

$$d: x - 2y + 10 = 0.$$

Valoarea minimă a sumei $S(M) = MA + MB$, când punctul M parcurge dreapta d, este ...
(*T.G.* 2018, ex. 525, p. 48)

407. Fie dreapta d: $x + y = 0$ şi punctele $A(4, 0)$, $B(0, 3)$. Valoarea minimă a sumei $MA + MB$ pentru $M \in d$ este ...
(*T.G.* 2010, ex. 757, p. 105)

408. Fie $A(0, -1)$, d_1: $x - y + 1 = 0$ şi d_2: $2x - y = 0$. Coordonatele punctelor $B \in d_1$ şi $C \in d_2$, pentru care dreptele d_1 şi d_2 sunt mediane în triunghiul ABC, sunt ...
(*T.G.* 2018, ex. 522, p. 48)

409. Laturile AB, BC, CA ale triunghiului ABC au respectiv ecuaţiile:

$$x + 21y - 22 = 0,\ 5x - 12y + 7 = 0,\ 4x - 33y + 146 = 0.$$

Distanţa de la centrul de greutate al triunghiului ABC la latura BC este ...
(*T.G.* 2018, ex. 529, p. 48)

410. Fie dreptele (AB): $x + 2y - 1 = 0$, (BC): $2x - y + 1 = 0$, (AC): $2x + y - 1 = 0$, care determină triunghiul ABC. Bisectoarea unghiului B are ecuaţia ...
(*T.G.* 2018, ex. 523, p. 48)

411. Se consideră triunghiul ABC, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ şi punctul $D\left(\frac{3}{4}, \lambda\right)$.

Punctul D se află în interiorul triunghiului ABC dacă şi numai dacă:

A. $\lambda \in (-\infty, 0]$; B. $\lambda \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$; C. $\lambda \in (1, \infty)$;

D. $\lambda \in (1, 2)$; E. alt răspuns.
(*T.G.* 2010, ex. 730, p. 102)

412. Punctul $A(-4, 1)$ este un vârf al pătratului $ABCD$ parcurs în sens trigonometric, căruia îi cunoaştem o diagonală de ecuaţie $3x - y - 2 = 0$.
a) Aria pătratului $ABCD$ este ...
b) Punctul C are coordonatele ...
(*T.G.* 2018, ex. 537, 538, p. 49)

413. Fie în planul xOy punctele $A(4, 0)$, $B(5, 1)$, $C(1, 5)$, $D(0, 4)$.
a) Patrulaterul $ABCD$ este:
A. patrulater oarecare; B. trapez isoscel; C. romb;
D. dreptunghi; E. trapez dreptunghic.
b) Aria patrulaterului este:
A. 4; B. 8; C. 1; D. 16; E. 2.
c) Simetricul punctului A faţă de dreapta BC este punctul de coordonate:
A. (1, 5); B. (5, 1); C. (5, 2); D. (6, 2); E. (6, 4).
(*T.G.* 2018, ex. 539, 540, 541, p. 49)

414. Ecuaţiile dreptelor care sunt la distanţă 2 faţă de punctul $A(2, 1)$ şi care trec prin originea $O(0, 0)$ sunt ...
(Simulare *U.T.C.N.* 12 mai 2018)

415. Distanţa de la pătratul $|x| + |y| = 1$ la cercul $(x - 1)^2 + (y - 2{,}5)^2 = 1$ este ...
(*T.G.* 2006, ex. 779, p. 110)

416. Se consideră cercul $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$. Punctul $A(1, 2)$ este mijlocul unei coarde a cercului. Lungimea acestei coarde este ...
(*T.G.* 2008, ex. 790, p. 112)

417. Se consideră cercul $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$. Ecuaţia diametrului perpendicular pe dreapta $5x + 2y - 13 = 0$ este ...
(*T.G.* 2008, ex. 791, p. 112)

418. Fie cercul $\mathscr{C} : x^2 + y^2 = 1$ şi punctele $A(4, 0)$, $B(0, 3)$. Valoarea minimă a sumei $MA^2 + MB^2$ pentru $M \in \mathscr{C}$ este ...
(*T.G.* 2010, ex. 758, p. 105)

419. Ecuaţia cercului cu centrul $C(-1, 1)$ şi care taie pe dreapta de ecuaţie $x - 2y + 1 = 0$ un segment de lungime 2 este ...
(*T.G.* 2006, ex. 797, p. 113)

420. Fie $A(a, 0)$ un punct în planul cercului de ecuaţie $x^2 + y^2 = r^2$. O secantă mobilă dusă prin A taie cercul în M şi N. Mijlocul segmentului MN se află pe curba de ecuaţie ...
(*T.G.* 2008, ex. 822, p. 116)

421. Se consideră cercurile $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0$, $\lambda > 1$.
a) Distanţa cea mai mare dintre punctele celor două cercuri este ...
(*T.G.* 2006, ex. 801, p. 114)
b) O tangentă comună la cele două cercuri este dreapta ...
(*T.G.* 2006, ex. 802, p. 114)

422. Valoarea maximă a funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$, când $x^2 + y^2 \le 2x$ este ...
(*T.G.* 2004, ex. 885, p. 137)